page 350 1/3 - 1992 -
E.S.E.O ... I.S.E.P M Math 2

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Samedi 30 mai 1992 de 8 h à 12 h

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

L'objet de ce problème est d'étudier une courbe définie en paramétrique, enveloppe d'une famille de droites dans le plan et de trouver une valeur approchée de la longueur d'une de ses portions.

Dans tout le problème le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I : Enveloppe d'une famille de droites

Pour tout réel θ on définit les points $P_\theta(\cos\theta, 0)$ et, si $\theta \neq 0$, $N_\theta\left(0, \frac{-2\cos\theta}{\theta}\right)$.

1) a) Donner, lorsqu'elle existe, une équation de la droite (D_θ) passant par les points P_θ et N_θ.

b) Déterminer l'enveloppe de la famille de droites (D_θ) (on ne demande pas ici de tracer la courbe).

2) φ étant une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère pour tout θ réel, le point $A_\theta(\varphi(\theta), 2\sin\theta)$ et la courbe Γ, ensemble des points A_θ pour θ décrivant $\mathbb{R}$.

Montrer que la famille de droites $(A_\theta P_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ enveloppe la courbe Γ si et seulement si φ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad x'\sin\theta - x\cos\theta = -\cos^2\theta.$$

On fera l'hypothèse naturelle que le point de contact entre la droite $(A_\theta P_\theta)$ et la courbe Γ est le point A_θ.

T.s.v.p.

3) Donner les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à l'équation (E).

4) Montrer qu'il existe une unique fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que φ soit solution sur $\mathbb{R}$ de (E) et telle que Γ, ensemble des points de coordonnées $(\varphi(\theta), 2 \sin \theta)$, quand θ décrit $\mathbb{R}$, passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Retrouver alors le résultat de la question 1°)b).

Partie II : Etude et tracé d'une courbe

On considère dorénavant la fonction φ_0 définie par :

$$\varphi_0(\theta) = \cos\theta + \theta \sin\theta$$

et Γ_0 la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x(\theta) = \varphi_0(\theta) \\ y(\theta) = 2 \sin \theta \end{cases}$ $\theta \in \mathbb{R}$.

1) a) Déterminer les points singuliers de Γ_0 : on montrera que pour tout k de $\mathbb{Z}$ il existe un point singulier de paramètre $\theta_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$.

b) Montrer qu'en ces points les tangentes à Γ_0 passent par l'origine.

c) Donner, sur tout l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$ $(k \in \mathbb{Z})$, la position de la courbe Γ_0 par rapport à la tangente au point de paramètre θ_k.

d) Montrer que les seuls points d'inflexion possibles de Γ_0 sont des points de paramètre θ_k.

2) a) Etudier les variations de x et y sur $[0, 2\pi]$.

b) Construire la portion de la courbe Γ_0 correspondant à $\theta \in [0, 2\pi]$.

Partie III : Etude du rayon de courbure

1) Calculer, pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, le rayon de courbure $R(\theta)$ de Γ_0 au point de paramètre θ.

2) a) Montrer qu'une condition nécessaire sur θ pour que R présente un maximum en θ sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$, est que θ vérifie l'équation (E_0) : $(\theta^2 + 4) \tan \theta = 3\theta$.

b) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, l'équation (E_0) admet une unique solution α_k dans $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.

3) Dans cette question on s'intéresse à la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

a) Donner un équivalent simple de α_k.

b) Montrer que la suite $(\alpha_k - k\pi)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

c) Etablir que : $\alpha_k = k\pi + \frac{3}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k}\right)$.

d) Montrer qu'il existe deux réels A et B, que l'on calculera, tels que :

$$\alpha_k = k\pi + \frac{A}{k} + \frac{B}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Partie IV : Longueur d'une portion de courbe

1) Donner la longueur $\mathcal{L}$ de la portion de la courbe Γ_0 correspondant à $\theta \in [0,1]$ sous forme d'une intégrale.

2) On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$: $I_k = \int_0^1 \theta^k \cos\theta \, d\theta$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

c) Trouver une relation entre I_k et I_{k+2}.

3) a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en précisant le rayon de convergence.

b) Montrer qu'il existe une suite de réels $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k I_{2k}$ et donner l'expression de A_k.

c) Montrer que : $\forall n \geqslant 1 \quad \left|\mathcal{L} - \sum_{k=0}^{n} A_k I_{2k}\right| \leqslant \frac{1}{n2^{2n+2}}$.

4) Ecrire un programme PASCAL permettant d'obtenir une valeur approchée de $\mathcal{L}$ à 10^{-4} près. On précisera le rôle de chaque variable utilisée.
